Extrapolació d'operadors i convergència *almost everywhere* de la sèrie de Fourier

Carlos Domingo - Grup d'Anàlisi Real i Funcional UB

UNIVERSITAT DE BARCELONA

SIMBa
Seminari Informal
de Matemàtiques de Barcelona

6 de novembre del 2013

Continguts

GARF

Grup d'Anàlisi Real i Funcional
Font: http://garf.ub.es/

GARF

GARF



Funcions

Partim d'una funció mesurable

$$\begin{array}{rccc} f: & (X,\mu) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & f(x), \end{array}$$

Funcions

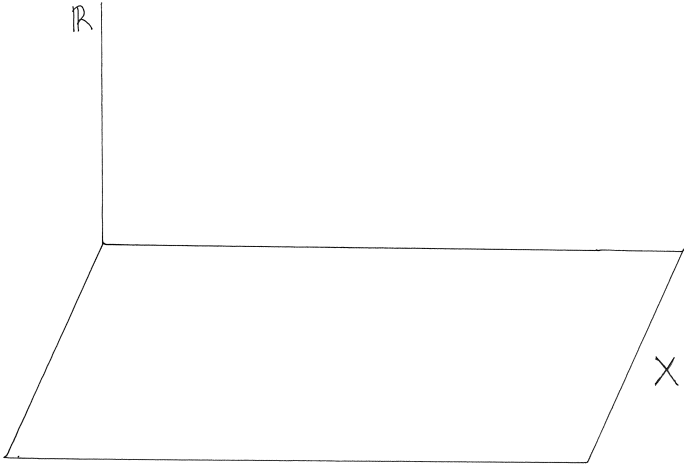
Partim d'una funció mesurable

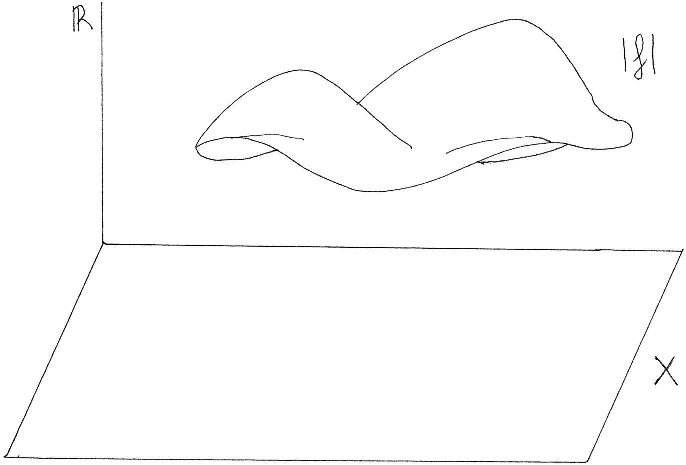
$$\begin{array}{rccc} f: & (X,\mu) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & f(x), \end{array}$$

i considerem el seu mòdul

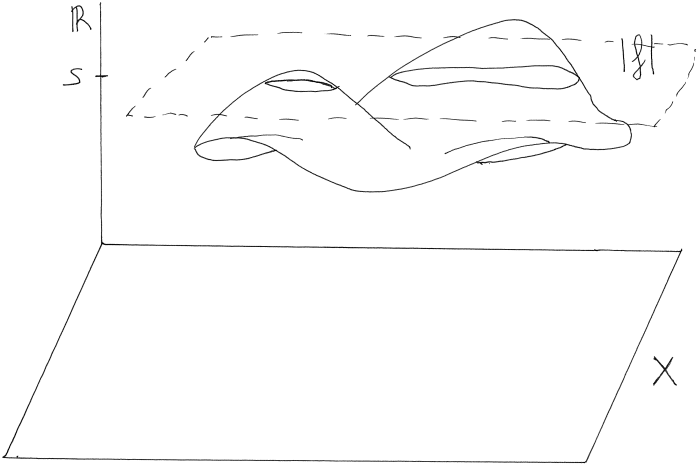
$$\begin{array}{rccc} |f|: & (X,\mu) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & |f(x)|. \end{array}$$

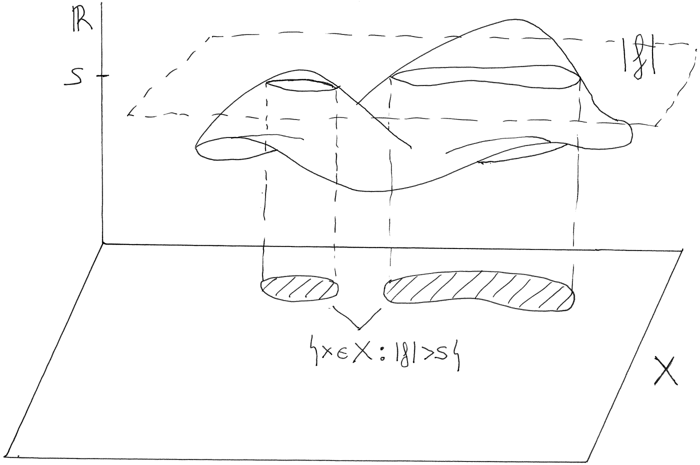
Dibuixem-lo:


ℝ
X

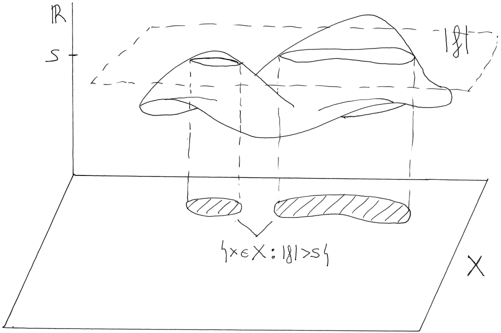


ℝ
|f|
X


ℝ
s
|f|
X


$\mathbb{R}$
s
$|f|$
$\{x \in X : |f| > s\}$
X

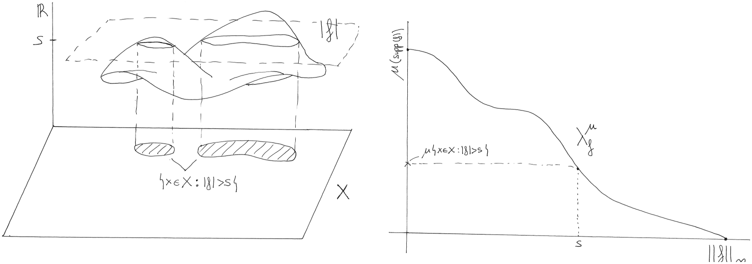
Funció de distribució



Per cada nivell $s > 0$, definim

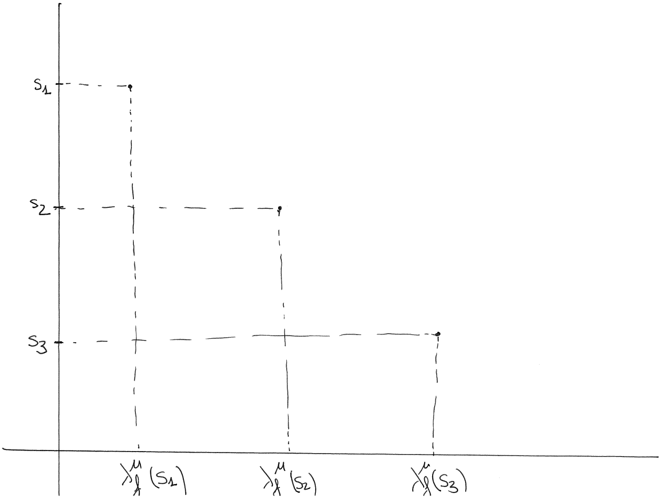
$$\lambda_f^\mu(s) = \mu\left(\{x \in X : |f| > s\}\right).$$

Funció de distribució

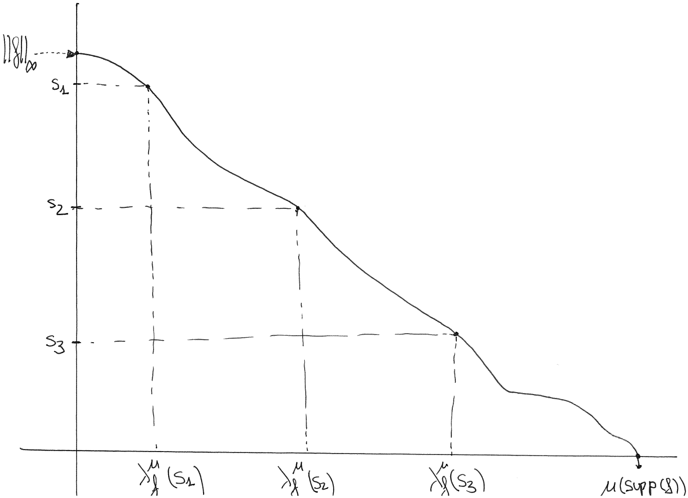


$$\lambda_f^{\mu}(s) = \mu\left(\{x \in X : |f| > s\}\right).$$

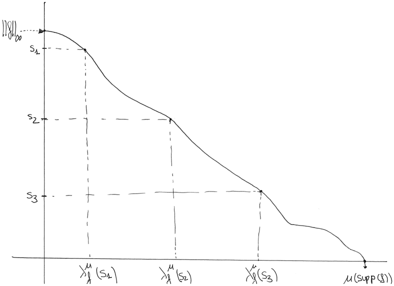
Amb això, fem la següent construcció:



Amb això, fem la següent construcció:

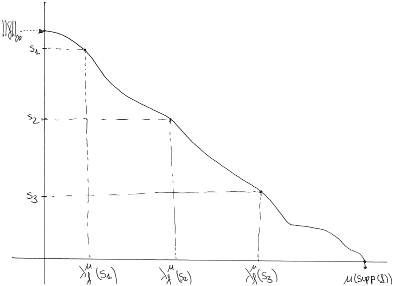


Reordenament decreixent



- Funció decreixent en $(0, \infty)$, que denotem per f_μ^*

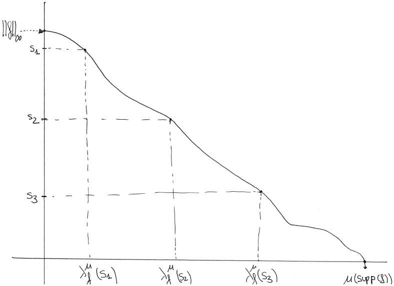
Reordenament decreixent



- Funció decreixent en $(0, \infty)$, que denotem per f_μ^*
- Equidistribuïda amb f:

$$|\{t > 0 : f_\mu^*(t) > s\}| = \mu\{x \in X : |f| > s\},$$

Reordenament decreixent

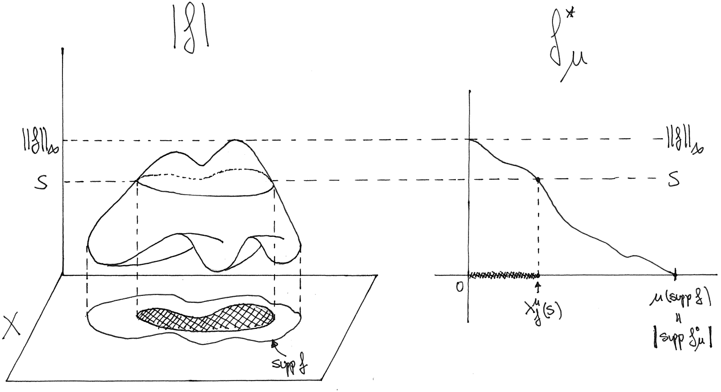


- Funció decreixent en $(0, \infty)$, que denotem per f_μ^*
- Equidistribuïda amb f:

$$|\{t > 0 : f_\mu^*(t) > s\}| = \mu\{x \in X : |f| > s\},$$

- $\int_X |f| d\mu = \int_0^\infty f_\mu^*(t) dt.$

Reordenament decreixent



Oblidem-nos d'espais de mesura estranys...

A partir d'ara, el nostre espai de mesura serà $\mathbb{R}^n$ amb la mesura de Lebesgue, i considerarem funcions

$$\begin{array}{rccc} f: & (\mathbb{R}^n, m) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

Espais L^p i $L \log L$

Farem servir espais L^p, $1 \leq p < \infty$,

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

Espais L^p i $L \log L$

Farem servir espais L^p, $1 \leq p < \infty$,

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} = \left(\int_0^\infty f^*(t)^p dt \right)^{1/p},$$

Espais L^p i $L \log L$

Farem servir espais L^p, $1 \leq p < \infty$,

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} = \left(\int_0^\infty f^*(t)^p dt \right)^{1/p},$$

i l'espai proper a L^1

$$\|f\|_{L \log L} = \int_0^\infty f^*(t) \qquad\qquad dt$$

Espais L^p i $L \log L$

Farem servir espais L^p, $1 \leq p < \infty$,

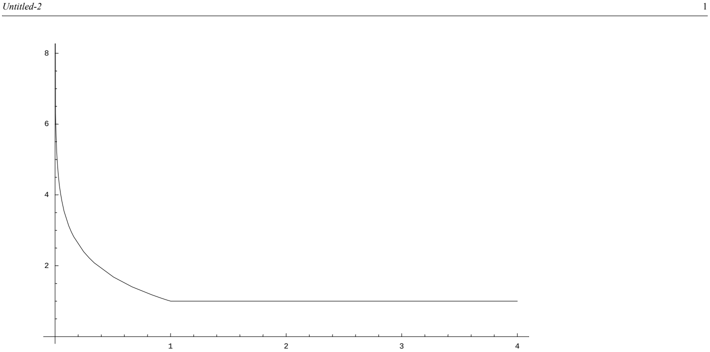
$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} = \left(\int_0^\infty f^*(t)^p dt \right)^{1/p},$$

i l'espai proper a L^1

$$\|f\|_{L \log L} = \int_0^\infty f^*(t) \left(1 + \log^+ \frac{1}{t} \right) dt$$

Espais L^p i $L \log L$

$$\|f\|_{L \log L} = \int_0^{\infty} f^*(t) \left(1 + \log^+ \frac{1}{t}\right) dt$$



Operadors

Donada una aplicació lineal

$$T : E \longrightarrow F$$

entre dos espais vectorials (quasi)normats E, F, direm que és un *operador acotat* si existeix una constant $C > 0$ tal que

$$\|Tf\|_F \leq C\|f\|_E, \quad \forall f \in E.$$

Anomenarem a C la **constant d'acotació**.

Hölder

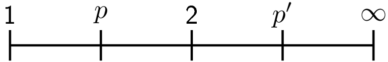
Si tenim $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, aleshores

$$\int_E fg \leq \left(\int_E f^p\right)^{1/p} \left(\int_E g^{p'}\right)^{1/p'} .$$

Hölder

Si tenim $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, aleshores

$$\int_E fg \leq \left(\int_E f^p\right)^{1/p} \left(\int_E g^{p'}\right)^{1/p'}.$$



Notació

Finalment, si existeix una constant $C > 0$ tal que $x \leq Cy$, escriurem

$$x \lesssim y.$$

Notació

Finalment, si existeix una constant $C > 0$ tal que $x \leq Cy$, escriurem

$$x \lesssim y.$$

I si tenim $x \lesssim y$ i $y \lesssim x$, escriurem

$$x \approx y.$$

Continguts

Idea general

Suposem que tenim dues famílies d'espais $\{X_\lambda\}_\lambda, \{Y_\lambda\}_\lambda$, un operador acotat

$$T : X_\lambda \longrightarrow Y_\lambda, \quad \text{per tot } \lambda \in \Lambda,$$

Idea general

Suposem que tenim dues famílies d'espais $\{X_\lambda\}_\lambda, \{Y_\lambda\}_\lambda$, un operador acotat

$$T : X_\lambda \longrightarrow Y_\lambda, \quad \text{per tot } \lambda \in \Lambda,$$

i coneixem com es comporta la constant d'acotació C_λ quan $\lambda \to \tilde{\lambda} \in \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$.

Idea general

Suposem que tenim dues famílies d'espais $\{X_\lambda\}_\lambda, \{Y_\lambda\}_\lambda$, un operador acotat

$$T : X_\lambda \longrightarrow Y_\lambda, \quad \text{per tot } \lambda \in \Lambda,$$

i coneixem com es comporta la constant d'acotació C_λ quan $\lambda \to \tilde{\lambda} \in \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$.
Direm que tenim un **resultat d'extrapolació de Yano** si d'aquí deduïm que existeixen espais $X_{\tilde{\lambda}}$ i $Y_{\tilde{\lambda}}$ que no estaven a les famílies de partida i de manera que

$$T : X_{\tilde{\lambda}} \longrightarrow Y_{\tilde{\lambda}}$$

està acotat.

Escenari del Teorema de Yano

Tenim un operador acotat

$$T : L^p \longrightarrow L^p$$

per tot $p \in (1, p_0)$.

Escenari del Teorema de Yano

Tenim un operador acotat

$$T : L^p \longrightarrow L^p$$

per tot $p \in (1, p_0)$.
La constant d'acotació C_p es comporta com $\frac{1}{p-1}$ a prop de $p = 1$.

Estimació I

Prenem una funció f de L^1 acotada per 1 ($\|f\|_\infty \leq 1$).

Estimació I

Prenem una funció f de L^1 acotada per 1 ($\|f\|_\infty \leq 1$). Fixem $p \in (1, p_0)$ i $t > 0$:

$$\int_0^t (Tf)^*(s)ds$$

Estimació I

Prenem una funció f de L^1 acotada per 1 ($\|f\|_\infty \leq 1$). Fixem $p \in (1, p_0)$ i $t > 0$:

$$\int_0^t (Tf)^*(s)ds \leq \|Tf\|_p t^{1/p'}$$

Estimació I

Prenem una funció f de L^1 acotada per 1 ($\|f\|_\infty \leq 1$). Fixem $p \in (1, p_0)$ i $t > 0$:

$$\int_0^t (Tf)^*(s)ds \leq \|Tf\|_p t^{1/p'} \lesssim \frac{t^{1/p'}}{p-1}\|f\|_p$$

Estimació I

Prenem una funció f de L^1 acotada per 1 ($\|f\|_\infty \leq 1$). Fixem $p \in (1, p_0)$ i $t > 0$:

$$\int_0^t (Tf)^*(s)ds \leq \|Tf\|_p t^{1/p'} \lesssim \frac{t^{1/p'}}{p-1}\|f\|_p \leq \frac{t^{1/p'}}{p-1}\|f\|_1^{1/p}.$$

Estimació I

Prenem una funció f de L^1 acotada per 1 ($\|f\|_\infty \leq 1$). Fixem $p \in (1, p_0)$ i $t > 0$:

$$\int_0^t (Tf)^*(s)ds \leq \|Tf\|_p t^{1/p'} \lesssim \frac{t^{1/p'}}{p-1}\|f\|_p \leq \frac{t^{1/p'}}{p-1}\|f\|_1^{1/p}.$$

Reescrivim fent servir ($1/p' = 1 - 1/p$):

$$\int_0^t (Tf)^*(s)ds \lesssim t\frac{1}{p-1}\left(\frac{\|f\|_1}{t}\right)^{1/p},$$

Estimació I

Prenem una funció f de L^1 acotada per 1 ($\|f\|_\infty \leq 1$). Fixem $p \in (1, p_0)$ i $t > 0$:

$$\int_0^t (Tf)^*(s)ds \leq \|Tf\|_p t^{1/p'} \lesssim \frac{t^{1/p'}}{p-1}\|f\|_p \leq \frac{t^{1/p'}}{p-1}\|f\|_1^{1/p}.$$

Reescrivim fent servir ($1/p' = 1 - 1/p$):

$$\int_0^t (Tf)^*(s)ds \lesssim t\frac{1}{p-1}\left(\frac{\|f\|_1}{t}\right)^{1/p},$$

i prenem ínfim en $p \in (1, p_0)$:

$$\int_0^t (Tf)^*(s)ds \lesssim t \inf_{1<p<p_0} \frac{1}{p-1}\left(\frac{\|f\|_1}{t}\right)^{1/p}$$

Estimació I

Prenem una funció f de L^1 acotada per 1 ($\|f\|_\infty \leq 1$). Fixem $p \in (1, p_0)$ i $t > 0$:

$$\int_0^t (Tf)^*(s)ds \leq \|Tf\|_p t^{1/p'} \lesssim \frac{t^{1/p'}}{p-1}\|f\|_p \leq \frac{t^{1/p'}}{p-1}\|f\|_1^{1/p}.$$

Reescrivim fent servir ($1/p' = 1 - 1/p$):

$$\int_0^t (Tf)^*(s)ds \lesssim t\frac{1}{p-1}\left(\frac{\|f\|_1}{t}\right)^{1/p},$$

i prenem ínfim en $p \in (1, p_0)$:

$$\int_0^t (Tf)^*(s)ds \lesssim t \inf_{1<p<p_0} \frac{1}{p-1}\left(\frac{\|f\|_1}{t}\right)^{1/p} \lesssim t\left(\frac{\|f\|_1}{t}\right)\left(1 + \log^+ \frac{t}{\|f\|_1}\right)$$

Estimació I

Simplificant, hem arribat a

$$\int_0^t (Tf)^*(s)ds \lesssim \|f\|_1(1+\log^+ t)\left(1+\log^+ \frac{1}{\|f\|_1}\right).$$

Estimació I

Simplificant, hem arribat a

$$\int_0^t (Tf)^*(s)ds \lesssim \|f\|_1(1+\log^+ t)\left(1+\log^+ \frac{1}{\|f\|_1}\right).$$

Passant els termes amb t a una banda i prenent suprem en $t>0$, tenim:

$$\|Tf\|_R := \sup_{t>0} \frac{\int_0^t (Tf)^*(s)ds}{1+\log^+ t} \lesssim \|f\|_1\left(1+\log^+ \frac{1}{\|f\|_1}\right)$$

Estimació I

Tenim una estimació per tota funció amb $\|f\|_\infty \leq 1$:

$$\|Tf\|_R \lesssim \|f\|_1 \left(1 + \log^+ \frac{1}{\|f\|_1}\right).$$

Estimació II

Si ara agafem una funció de L^1 qualsevol, la podem descompondre de la següent manera:

Estimació II

Si ara agafem una funció de L^1 qualsevol, la podem descompondre de la següent manera:

$$f = f\chi_{\{|f|\leq 1\}} + \sum_{n=1}^{\infty} f\chi_{\{2^{n-1}<|f|\leq 2^n\}}$$

Estimació II

Si ara agafem una funció de L^1 qualsevol, la podem descompondre de la següent manera:

$$\begin{aligned} f &= f\chi_{\{|f|\le 1\}} + \sum_{n=1}^{\infty} f\chi_{\{2^{n-1}<|f|\le 2^n\}} \\ &= f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \end{aligned}$$

Estimació II

Si ara agafem una funció de L^1 qualsevol, la podem descompondre de la següent manera:

$$
\begin{aligned}
f &= f\chi_{\{|f|\leq 1\}} + \sum_{n=1}^{\infty} f\chi_{\{2^{n-1}<|f|\leq 2^n\}} \\
&= f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \\
&= f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{f_n}{2^n},
\end{aligned}
$$

Estimació II

Si ara agafem una funció de L^1 qualsevol, la podem descompondre de la següent manera:

$$\begin{aligned} f &= f\chi_{\{|f|\leq 1\}} + \sum_{n=1}^{\infty} f\chi_{\{2^{n-1}<|f|\leq 2^n\}} \\ &= f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \\ &= f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{f_n}{2^n}, \end{aligned}$$

i tenim que

$$\|f_0\|_\infty \leq 1, \quad \left\|\frac{f_n}{2^n}\right\|_\infty \leq 1$$

Estimació II

Apliquem T i prenem normes:

$$\|Tf\|_R \leq \|Tf_0\|_R + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left\| T\left(\frac{f_n}{2^n}\right) \right\|_R$$

Estimació II

Apliquem T i prenem normes:

$$\begin{aligned}\|Tf\|_R &\leq \|Tf_0\|_R + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left\| T\left(\frac{f_n}{2^n}\right)\right\|_R \\ &\lesssim \|f_0\|_1 \left(1 + \log^+ \frac{1}{\|f_0\|_1}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left\|\frac{f_n}{2^n}\right\|_1 \left(1 + \log^+ \frac{1}{\left\|\frac{f_n}{2^n}\right\|_1}\right)\end{aligned}$$

Estimació II

Apliquem T i prenem normes:

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_R &\leq \|Tf_0\|_R + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left\| T\left(\frac{f_n}{2^n}\right) \right\|_R \\
&\lesssim \|f_0\|_1 \left(1 + \log^+ \frac{1}{\|f_0\|_1}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left\| \frac{f_n}{2^n} \right\|_1 \left(1 + \log^+ \frac{1}{\left\| \frac{f_n}{2^n} \right\|_1}\right) \\
&\leq \|f\|_1 \left(1 + \log^+ \frac{1}{\|f\|_1}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \lambda_f(2^{n-1}) \left(1 + \log^+ \frac{1}{\lambda_f(2^{n-1})}\right)
\end{aligned}$$

Estimació II

Apliquem T i prenem normes:

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_R &\leq \|Tf_0\|_R + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left\| T\left(\frac{f_n}{2^n}\right) \right\|_R \\
&\lesssim \|f_0\|_1 \left(1 + \log^+ \frac{1}{\|f_0\|_1}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left\| \frac{f_n}{2^n} \right\|_1 \left(1 + \log^+ \frac{1}{\left\| \frac{f_n}{2^n} \right\|_1}\right) \\
&\leq \|f\|_1 \left(1 + \log^+ \frac{1}{\|f\|_1}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \lambda_f(2^{n-1}) \left(1 + \log^+ \frac{1}{\lambda_f(2^{n-1})}\right)
\end{aligned}$$

Estimació II

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \lambda_f(2^{n-1}) \left(1 + \log^+ \frac{1}{\lambda_f(2^{n-1})}\right) \lesssim \int_0^{\infty} \lambda_f(s) \left(1 + \log^+ \frac{1}{\lambda_f(s)}\right) ds$$

Estimació II

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \lambda_f(2^{n-1}) \left(1 + \log^+ \frac{1}{\lambda_f(2^{n-1})}\right) \lesssim \int_0^\infty \lambda_f(s) \left(1 + \log^+ \frac{1}{\lambda_f(s)}\right) ds$$
$$\approx \int_0^\infty f^*(s) \left(1 + \log^+ \frac{1}{s}\right) ds.$$

Estimació II

Per tant, arribem a què, per una funció qualsevol de L^1,

$$\|Tf\|_R \lesssim \|f\|_1 \left(1 + \log^+ \frac{1}{\|f\|_1}\right) + \int_0^\infty f^*(s) \left(1 + \log^+ \frac{1}{s}\right) ds.$$

Estimació II

Per tant, arribem a què, per una funció qualsevol de L^1,

$$\|Tf\|_R \lesssim \|f\|_1 \left(1 + \log^+ \frac{1}{\|f\|_1}\right) + \int_0^\infty f^*(s) \left(1 + \log^+ \frac{1}{s}\right) ds.$$

Si substituïm f per αf:

$$\cancel{\alpha}\|Tf\|_R \lesssim \cancel{\alpha}\|f\|_1 \left(1 + \log^+ \frac{1}{\alpha\|f\|_1}\right) + \cancel{\alpha} \int_0^\infty f^*(s) \left(1 + \log^+ \frac{1}{s}\right) ds.$$

Estimació II

Per tant, arribem a què, per una funció qualsevol de L^1,

$$\|Tf\|_R \lesssim \|f\|_1 \left(1 + \log^+ \frac{1}{\|f\|_1}\right) + \int_0^\infty f^*(s) \left(1 + \log^+ \frac{1}{s}\right) ds.$$

Si substituïm f per αf:

$$\cancel{\alpha}\|Tf\|_R \lesssim \cancel{\alpha}\|f\|_1 \left(1 + \log^+ \frac{1}{\alpha\|f\|_1}\right) + \cancel{\alpha} \int_0^\infty f^*(s) \left(1 + \log^+ \frac{1}{s}\right) ds.$$

I fent tendir $\alpha \to \infty$:

$$\|Tf\|_R \leq \|f\|_1 + \|f\|_{L \log L} \lesssim \|f\|_{L \log L}.$$

Teorema de Yano i Antonov

YANO:

$$T : L^p \longrightarrow L^p \text{ ctt } \frac{1}{p-1} \Longrightarrow T : L \log L \longrightarrow R,$$

Teorema de Yano i Antonov

YANO:

$$T : L^p \longrightarrow L^p \text{ ctt } \frac{1}{p-1} \Longrightarrow T : L \log L \longrightarrow R,$$

ANTONOV:

$$T : L^p \longrightarrow L^{p,\infty} \text{ ctt } \frac{1}{p-1} \Longrightarrow$$

Teorema de Yano i Antonov

YANO:

$$T : L^p \longrightarrow L^p \text{ ctt } \frac{1}{p-1} \Longrightarrow T : L \log L \longrightarrow R,$$

ANTONOV:

$$T : L^p \longrightarrow L^{p,\infty} \text{ ctt } \frac{1}{p-1} \Longrightarrow T : L \log L \log\log\log L \longrightarrow \tilde{R},$$

Continguts

Sèries de Fourier

Partim d'una funció $f \in L^1[0,1]$ **senyal**

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$$

Sèries de Fourier

Partim d'una funció $f \in L^1[0,1]$ **senyal**

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$$

I construïm els anomenats **coeficients de Fourier**

$$\{\hat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

Sèries de Fourier

Partim d'una funció $f \in L^1[0,1]$ **senyal**

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$$

I construïm els anomenats **coeficients de Fourier**

$$\{\hat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

En transmetem uns quants $\{\hat{f}(k)\}_{k=-N}^{N}$ i el receptor construeix la suma parcial de la sèrie de Fourier

$$S_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) a_k(x).$$

Sèries de Fourier

Pregunta: Si suposem que N és prou gran, som a prop de recuperar el senyal original f a partir de la seva suma parcial de Fourier??

$$f(x) = Sf(x) = \lim_N S_N f(x) \text{ g.p.t. } x \in [0,1] \text{ ??}$$

La història...

$$L^\infty \subseteq \cdots \subseteq L^2 \subseteq \cdots \subseteq L^p_{(p>1)} \subseteq L \log L \log\log\log L \subseteq L \log L \subseteq L^1$$

La història...

Teorema de Carleson (M. Fields)

$$L^\infty \subseteq \cdots \subseteq L^2 \subseteq \cdots \subseteq L^p_{(p>1)} \subseteq L \log L \log\log\log L \subseteq L \log L \subseteq L^1$$

La història...

Teorema de Hunt

$$L^\infty \subseteq \cdots \subseteq L^2 \subseteq \cdots \subseteq L^p_{(p>1)} \subseteq L \log L \log\log\log L \subseteq L \log L \subseteq L^1$$

La història...

Contraexemple de Kolmogorov a L^1

$$L^\infty \subseteq \cdots \subseteq L^2 \subseteq \cdots \subseteq L^p_{(p>1)} \subseteq L \log L \log\log\log L \subseteq L \log L \subseteq \underbrace{L^1}_{NO}$$

La història...

Teorema d'Antonov

$$L^\infty \subseteq \cdots \subseteq L^2 \subseteq \cdots \subseteq L^p_{(p>1)} \subseteq L \log L \log \log \log L \subseteq L \log L \subseteq \underbrace{L^1}_{NO}$$

Estratègia

Com es fa? Resulta que si es defineix l'operador maximal de Carleson per

$$S_* f(x) = \sup_N |S_N f(x)|,$$

Estratègia

Com es fa? Resulta que si es defineix l'operador maximal de Carleson per

$$S_* f(x) = \sup_N |S_N f(x)|,$$

és fàcil provar que

$$S_* : E \longrightarrow R \Longleftrightarrow \text{Per tota } f \in E, \quad Sf(x) = f(x) \text{ g.p.t.}$$

Estratègia

- La prova de Carleson és, bàsicament, que S_* està acotat a L^2.

Estratègia

- La prova de Carleson és, bàsicament, que S_* està acotat a L^2.
- Hunt prova que, de fet, S_* està acotat a L^p per tot $p > 1$.

Estratègia

- La prova de Carleson és, bàsicament, que S_* està acotat a L^2.
- Hunt prova que, de fet, S_* està acotat a L^p per tot $p > 1$.
- Antonov demostra que

$$S_* : L^p \longrightarrow L^{p,\infty}$$

amb constant $\frac{1}{p-1}$, i que amb això en té prou per assegurar l'acotació (i per tant, convergència g.p.t de les sèries de Fourier) a l'espai

$$L \log L \log \log \log L.$$

Comentaris

- El punt clau de la prova d'Antonov és, a l'hora de trencar la funció com a suma, fer

$$f = \sum_k f\chi_{\{2^{2^{k-1}} < |f| \leq 2^{2^k}\}}.$$

Comentaris

- El punt clau de la prova d'Antonov és, a l'hora de trencar la funció com a suma, fer

$$f = \sum_k f\chi_{\{2^{2^{k-1}} < |f| \leq 2^{2^k}\}}.$$

- Si es fa de manera diàdica habitual, s'arriba a $L \log L \log \log L$, però si es vol posar un nivell més $\left(2^{2^{2^k}}\right)$, NO s'arriba als 4 logaritmes.

Comentaris

- El punt clau de la prova d'Antonov és, a l'hora de trencar la funció com a suma, fer

$$f = \sum_k f\chi_{\{2^{2^{k-1}}<|f|\leq 2^{2^k}\}}.$$

- Si es fa de manera diàdica habitual, s'arriba a $L\log L\log\log L$, però si es vol posar un nivell més $\left(2^{2^{2^k}}\right)$, NO s'arriba als 4 logaritmes.

- A més, a Antonov apareixen problemes per tractar amb quasi-normes.

Comentaris

- Es conjectura que hi haurà convergència g.p.t. a $L \log L$, però dificilment s'hi arribi extrapolant.

Comentaris

- Es conjectura que hi haurà convergència g.p.t. a $L \log L$, però dificilment s'hi arribi extrapolant.

- La teoria d'extrapolació té moltes més aplicacions més enllà de la convergència de les sèries de Fourier (Operadors clàssics, Teoria Ergòdica, etc).

Comentaris

- Es conjectura que hi haurà convergència g.p.t. a $L \log L$, però dificilment s'hi arribi extrapolant.

- La teoria d'extrapolació té moltes més aplicacions més enllà de la convergència de les sèries de Fourier (Operadors clàssics, Teoria Ergòdica, etc).

- A part de Yano i Antonov, hi ha més resultats en el context d'espais L^p a prop de $p = 1$.

Resum de resultats prop de $p = 1$ amb ctt $(p-1)^{-m}$

Domini	Rang	Domini final
$L^p(\mu)$	$L^p(\nu)$	$L(\log L)^m(\mu)$

Resum de resultats prop de $p = 1$ amb ctt $(p-1)^{-m}$

Domini	Rang	Domini final
$L^p(\mu)$	$L^p(\nu)$	$L(\log L)^m(\mu)$
$L^p(\mu)$	$L^{p,\infty}(\nu)$	$L(\log L)^m \log_3 L(\mu)$

Resum de resultats prop de $p = 1$ amb ctt $(p-1)^{-m}$

Domini	Rang	Domini final
$L^p(\mu)$	$L^p(\nu)$	$L(\log L)^m(\mu)$
$L^p(\mu)$	$L^{p,\infty}(\nu)$	$L(\log L)^m \log_3 L(\mu)$
$L^{p,\infty}(\mu)$	$L^{p,\infty}(\nu)$	$[L(\log L)^{m-1} \log_3 L(\mu)]_1$

Resum de resultats prop de $p = 1$ amb ctt $(p-1)^{-m}$

Domini	Rang	Domini final
$L^p(\mu)$	$L^p(\nu)$	$L(\log L)^m(\mu)$
$L^p(\mu)$	$L^{p,\infty}(\nu)$	$L(\log L)^m \log_3 L(\mu)$
$L^{p,\infty}(\mu)$	$L^{p,\infty}(\nu)$	$[L(\log L)^{m-1} \log_3 L(\mu)]_1$
$L^p(\mu)$	$L^{p,q}(\nu)$	$L(\log L)^m (\log_3 L)^{\frac{1}{q'}}(\mu)$

Resum de resultats prop de $p = 1$ amb ctt $(p-1)^{-m}$

Domini	Rang	Domini final
$L^p(\mu)$	$L^p(\nu)$	$L(\log L)^m(\mu)$
$L^p(\mu)$	$L^{p,\infty}(\nu)$	$L(\log L)^m \log_3 L(\mu)$
$L^{p,\infty}(\mu)$	$L^{p,\infty}(\nu)$	$[L(\log L)^{m-1} \log_3 L(\mu)]_1$
$L^p(\mu)$	$L^{p,q}(\nu)$	$L(\log L)^m (\log_3 L)^{\frac{1}{q'}}(\mu)$
$L^{p,q}(\mu)$	$L^{p,q}(\nu)$	$[L(\log L)^{m-1+\frac{1}{q}} (\log_3 L)^{\frac{1}{q'}}(\mu)]_1$

...i una altra Teoria d'Extrapolació, anomenada de *Rubio de Francia*, que queda pendent per la pròxima!!

=)


Jean-Baptiste Joseph Fourier
Gràcies per la vostra atenció!!